



教学研讨会

线性变换与矩阵

辛 林

福建师大数学与计算机科学学院

Home Page

Title Page



Page 1 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



主要内容

- 一、线性映射与矩阵
- 二、线性变换与矩阵
- 三、正交变换与正交矩阵
- 四、对称变换与对称矩阵
- 五、伴随算子、共轭变换与矩阵转置

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 2 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



1 线性映射与矩阵

设 ${}_F V$ 是一个 n 维向量空间， ${}_F W$ 是一个 m 维向量空间。记 $\text{Hom}_F(V, W)$ 是 V 到 W 的所有线性映射构成的集合，这也是 F -向量空间。

$$\text{Hom}_F(V, W) \stackrel{\varphi}{\cong} F^{m \times n}$$

同构对应 φ 的构造如下：取定 V 基： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，和取定 W 的基： $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 。则对 $\forall f \in \text{Hom}_F(V, W)$ ，如果 $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)A_f$ ，则 $\varphi : \text{Hom}_F(V, W) \rightarrow F^{m \times n} : f \mapsto A_f$ 。这是向量空间同构映射。

如果取另外一对基，则得到的矩阵与原来矩阵具有相抵关系。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 3 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



2 线性变换与矩阵

设 $_F V$ 是一个 n 维向量空间。记 $\text{End}_F(V)$ 是 V 到自身的所有线性变换构成的集合，这是 F -代数。

$$\text{End}_F(V) \stackrel{\varphi}{\cong} F^{n \times n}$$

同构对应 φ 的构造如下：取定 V 基： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，则对 $\forall f \in \text{End}_F(V)$ ，如果 $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A_f$ ，则 $\varphi : \text{Hom}_F(V) \rightarrow F^{n \times n} : f \mapsto A_f$ 。这是代数同构映射。

如果取另外一个基，则得到的矩阵与原来矩阵具有相似关系。

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Page 4 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



3 正交变换与正交矩阵

设 $_R V$ 是一个 n 维欧氏空间。记 $\langle -, - \rangle$ 表示其上的内积，如果线性变换 f 满足 $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle f(\alpha), f(\beta) \rangle, \forall \alpha, \beta \in V$ ，称 f 是 V 上的正交变换。记 $O(_R V)$ 表示 V 上的所有正交变换构成的集合，这是一个群。

$$O(_R V) \stackrel{\varphi}{\cong} O(R^{n \times n})$$

其中 $O(R^{n \times n})$ 表示 n 阶正交矩阵全体构成的乘法群。

同构对应 φ 的构造如下：取定 V 的一个标准正交基： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，则对 $\forall f \in O(_R V)$ ，如果 $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)U_f$ ，则 $\varphi : O(_R V) \rightarrow O(R^{n \times n}) : f \mapsto U_f$ 。这是群同构映射。

如果取另外一个标准正交基，则得到的矩阵与原来矩阵具有正交相似关系。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 5 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



4 对称变换与对称矩阵

设 $_R V$ 是一个 n 维欧氏空间。记 $\langle -, - \rangle$ 表示其上的内积，如果线性变换 f 满足 $\langle \alpha, f(\beta) \rangle = \langle f(\alpha), \beta \rangle, \forall \alpha, \beta \in V$ ，称 f 是 V 上的对称变换。记 $S(_R V)$ 表示 V 上的所有对称变换构成的集合，这是一个向量空间。

$$S(_R V) \stackrel{\varphi}{\cong} S(R^{n \times n})$$

其中 $S(R^{n \times n})$ 表示 n 阶对称矩阵全体构成的向量空间。

同构对应 φ 的构造如下：取定 V 的一个标准正交基： $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ，则对 $\forall f \in S(_R V)$ ，如果 $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) S_f$ ，则 $\varphi : S(_R V) \rightarrow S(R^{n \times n}) : f \mapsto S_f$ 。这是向量空间同构映射。

如果取另外一个标准正交基，则得到的矩阵与原来矩阵具有正交相似关系。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 6 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



5 伴随算子、共轭算子与矩阵转置

设 $_K V$ 是一个 n 维向量空间, $\text{Hom}_K(V, K)$ 表示其对偶空间. 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 V 的一个基, 则令 $\alpha_i^* : V \rightarrow K$ 使得 $\alpha_i^*(\alpha_j) = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j \\ 0, & \text{当 } i \neq j \end{cases}$, 称 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*$ 是 $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ 上的关于 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的对偶基。

另取 m 维向量空间 $_K W$, 设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 是 W 的一个基, 同上面一样, 设 $\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_m^*$ 是 $W^* = \text{Hom}_K(W, K)$ 相应的对偶基。如果 $f \in \text{Hom}_K(V, W)$, 令 $f' \in \text{Hom}_K(W^*, V^*)$ 使得 $f'(g) = gf$, 其中 $g \in W^*$, 则称 f' 是 f 的伴随算子。

下面分别考察 f 与 f' 在基及对偶基下的矩阵关系:

设 $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_m)A$, 由于 $f'(\beta_i^*) = \beta_i^* f$, 所以

$$f'(\beta_1^*, \dots, \beta_m^*) = (\beta_1^* f, \dots, \beta_m^* f) = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)A'$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



下面考察伴随算子在欧氏空间中的情况。

定理（Riesz表示定理）：设 $_R V$ 是一个 n 维欧氏空间，对任意 $f \in V^*$ ，存在唯一向量 $x \in V$ ，使得对任意 $y \in V$ 有 $f(y) = \langle y, x \rangle$ 。由此建立了向量空间同构 $\phi : V^* \cong V$ 使 $\phi(f^*) = x$ 。

对任意 $f \in \text{Hom}_K(V, W)$ 和 $w \in W$ ，考虑函数 $\theta_w : V \rightarrow R$ 使 $\theta_w(v) = \langle f(v), w \rangle$ 。直接验证将表明 $\theta_w \in V^*$ 。由Riesz表示定理，存在唯一的 $x \in V$ 使得

$$\theta_w(v) = \langle f(v), w \rangle = \langle v, x \rangle$$

于是令 $f^*(w) = x$ ，可证明 $f^* : W \rightarrow V$ 是线性映射，称为 f 的共轭算子。从而有下面映射图：

$$\begin{array}{ccc} W^* & \xrightarrow{f'} & V^* \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 \\ W & \xrightarrow{f^*} & V \end{array}$$

其中 $\phi_1 : W^* \cong W$ 和 $\phi_2 : V^* \cong V$ 是由Riesz表示定理确定的同构映射。下面证明这是交换图。

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 8 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit



若 $x \in V, \phi_2^{-1}(x) = g$, 则 $\phi_2(g) = x, \phi_2^{-1}(x)(v) = g(v) = \langle v, \phi_2(g) \rangle = \langle v, x \rangle$. 于是 $(\phi_2)^{-1} f^* \phi_1(h)(v) = (\phi_2)^{-1}[f^* \phi_1(h)](v) = \langle v, f^* \phi_1(h) \rangle = \langle f(v), \phi_1(h) \rangle = h(f(v)) = f'(h)(v)$ 故 $(\phi_2)^{-1} f^* \phi_1 = f'$, 即 $f^* \phi_1 = \phi_2 f'$.

现取 V 的标准正交基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 和 W 的标准正交基 β_1, \dots, β_m . 如果

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\beta_1, \dots, \beta_m)A$$

则由 $\langle \alpha_j, \phi_2(\alpha_i^*) - \alpha_i \rangle = 0, \forall j$, 得 $\phi_2(\alpha_i^*) = \alpha_i$. 同理 $\phi_1(\beta_i^*) = \beta_i$. 所以 $f^*(\beta_1, \dots, \beta_m) = f^* \phi_1(\beta_1^*, \dots, \beta_m^*) = \phi_2 f'(\beta_1^*, \dots, \beta_m^*) = \phi_2(\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)A' = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)A'$. 所以 f^* 与 f' 分别在标准正交基和对偶基下的矩阵是同一个矩阵, 它们都是线性变换 f 的矩阵的转置矩阵。

注: 如果考虑酉空间, 则共轭变换 f^* 在标准正交基下的矩阵是线性变换 f 的矩阵的共轭转置矩阵。

参考文献

[1] 龚昇, 线性代数五讲[M], 科学出版社, 2005年.

[2] 陈昭木, 陈清华, 王华雄, 林亚南, 高等代数[M], 福建教育出版社, 1992年.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 9 of 9

Go Back

Full Screen

Close

Quit